유사도 통합에 관한 연구

김선경1)*, 박지수**, 손진곤2)*
*한국방송통신대학교 정보과학과
**전주대학교 컴퓨터공학과
skkim@wizbase.co.kr, jisupark@jj.ac.kr, jgshon@knou.ac.kr

A Study on Integrating Similarities

Sunkyung Kim*, Ji Su Park**, Jin Gon Shon*
*Dept. of Computer Science, Korea National Open University
**Dept. of Computer Science and Engineering, Jeonju University

요 약

유사도는 두 객체의 비슷한 정도를 실수로 나타낸 것이며 반대 개념인 다른 정도를 나타내는 것을 거리라 한다. 실세계에서 정확히 같은 것은 존재하기 힘들기 때문에 많은 응용 분야에서 유사도나 거리를 이용한다. 거리 중 대표적인 것으로 유클리드 공간에서 두 점 사이의 직선거리이다. 이 거리를 유클리드 거리라고 한다. 코사인 유사도는 벡터 공간에서 두 벡터 사이각의 코사인 값이다. 이외에도 용도에 따라 다양한 거리 또는 유사도가 연구되고 있다. 수학적으로 유사도는 이변수 함수로 나타낸다. 앞선 연구에서 민코프스키는 맨하탄 거리, 유클리드 거리 등을 매개변수 p를 이용하여 하나의 식으로 통합하였다. 이러한 유사도 통합은 유사도에 대한 새로운 통찰력을 제공하고 또 다른 응용을 제공한다. 본 논문은 기존 유사도의 의미를 개관하고 추가적인 매개변수를 도입하여 민코프스키 거리와 코사인 유사도를 통합한 식을 제시한다.

1. 서론

어떤 대상 간 대소 여부 혹은 정확한 일치 여부를 판단하는 비교 연산은 사람보다 컴퓨터가 빠르고 정확하게 수행한다. 그러나 실세계의 많은 문제는 어제 본 사람이 지금 보고 있는 사람과 같은 사람인가를 판단해야 하는 것처럼 비슷한 정도를 판단해야 한다. 그리고 사람은 실생활에서 비슷한 정도를 큰 노력 없이 계속해서 판단하고 있다. 컴퓨터가 이러한 판단을 수행하기 위해서 유사도(Similarity)를 구하는 연산을 한다. 유사도의 반대 개념인 다른 정도는 거리(Distance)라고 불리는 개념을 이용한다[1,2]. 이런 유사성 또는 비유사성을 측정하는 연산을 할 때 컴퓨터는 단순 비교 연산보다 많은 비용이 소모한다.

유사도는 얼굴이나 인식이나 표정 인식을 통한 감정 인식과 같은 형상 인식, 단백질의 유사성 파악을 통한 신약 개발 등 실세계의 많은 문제를 해결하기 위해 이용되고 있다[3-6]. 2,000년 이전 유클리드 거리부터 시작해서 현대의 코사인 유사도[7], 자카드 유사도[8], 민코프스키 거리[9] 등 많은 유사도가 연구되어 오고 있다. 이런 유사도들은 비슷한 형태로 묶여지며 비슷한 유사도는 민코프스키거리와 같이 매개변수를 이용하여 통합된다[10]. 유사도 통합을 통하여 새로운 통찰력과 응용을 제공한다. 본 논문은 코사인 유사도를 거리 개념으로 변경한 후 민코프스키 거리와 통합한 거리를 제시한다.

본 논문은 제2장에서 거리 및 유사도에 대하여 개관한다. 제3장에서는 코사인 유사도와 동일한 특성을 가지는 거리를 제시한다. 제4장에서는 점의 호 거리라는 거리를 제시하고 유클리드 거리와 관계를 밝힌다. 제5장에서 코사인 유사도와 민코프스키 거리를 통합하는 거리를 제시한다. 제6장은 본 연구에 대한 결론을 짓는다.

2. 거리/유사도 개관

거리는 두 개의 서로 다른 대상이 얼마나 떨어져 있는지를 나타내는 실수 값이다. 거리는 거리 함수를 이용하여 계산된다. 거리 함수의 정의역은 거리를 측정하고자 하는 대상 집합의 카티션 곱이며 공역은 실수이다[11]. 거리 함수는 아래와 같은 조건을 가져야 한다.

1) 한국방송통신대학교 대학원 재학생
2) 교신저자

X는 집합이다.
거리 함수 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 일 때 $x, y, z \in X$ 이다.
조건 1. $d(x,y) \geq 0$
조건 2. $d(x,y) = 0$이면 $x = y$이다.
조건 3. $d(x,y) = d(y,x)$
조건 4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

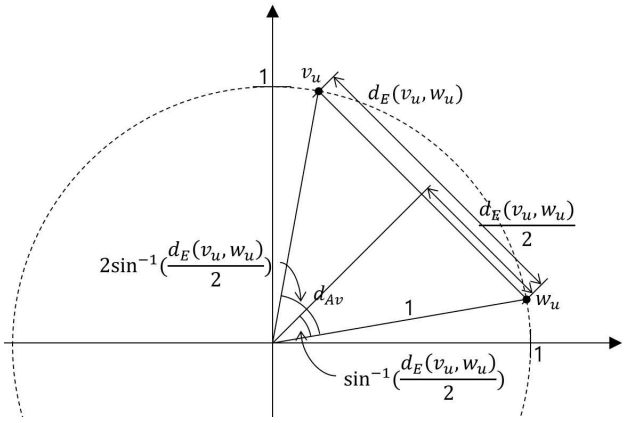
조건 1은 거리가 음의 수가 나올 수 없다는 조건이다. 거리는 떨어져 있는 정도라는 개념이므로 음의 값이 나올 수가 없다. 조건 2는 거리가 0이면 비교 대상이 되었던 두 대상은 같은 것이어야 한다는 것이다. 이 또한 우리가 일반적으로 생각하는 거리라는 개념과 일치한다. 조건 3은 x에서 y로의 거리와 y에서 x로의 거리는 같다는 것이다. 조건 4는 다른 곳으로 돌아가는 거리가 더 짧은 것은 존재하지 않는다는 것이다. 조건 3, 4번 역시 우리가 일반적으로 인식하는 거리와 일치하는 개념이다. 쉽게 생각할 수 있는 거리는 유클리드 공간에서 두 점 사이의 직선거리이며 이것을 유클리드 거리라고 한다. 유클리드 거리는 점의 각 성분 차이를 제곱하여 합한 후 제곱근을 하여 계산하며 조건 1부터 조건 4까지 만족함을 수학적으로 쉽게 증명 가능하다[12].

거리의 반대 개념으로 유사도가 있다. 유사도는 두 대상이 얼마나 비슷한지를 나타내는 수치를 계산하는 함수를 말한다. 유사도 함수의 정의역은 대상 집합의 카티션 곱이며 공역은 실수이다[11]. 거리와 반대로 유사도는 값이 클수록 두 대상은 가까이 있다. 대부분의 유사도 함수는 두 대상이 같을 때 유사도 값이 1이 된다. 또한 거리와 유사도는 간단한 식을 통하여 쉽게 서로 변환된다. 많은 분야에서 이용되고 있는 유사도는 두 벡터 사이각의 코사인 값을 취한 코사인 유사도이다. 두 벡터가 같은 방향을 가리킬 때 사이각은 0라디안이며 코사인 값은 1이고 점점 다른 방향을 가리킬 때 사이각은 점점 커지며 코사인 값은 점점 작아져서 사이각이 π라디안일 때 -1까지 된다. 즉 코사인 유사도는 두 벡터가 동일한 방향일 때 완전히 동일하다는 의미에서 1의 값을 수직일 때는 같지 않다는 의미에서 0을 서로 완전히 반대 방향일 때는 -1을 값을 가진다.

3. 코사인 유사도의 특징을 가지는 거리

코사인 유사도는 두 벡터 사이각의 코사인 값이다. 벡터 공간에서 벡터의 스칼라적을 두 벡터 크기의 곱으로 나누어준 것으로 계산한다[12].

벡터의 길이는 코사인 유사도에 영향을 주지 않으며 방향만을 영향을 미친다. 코사인 유사도를 반대 개념인 거리로 정의하기 위하여 코사인 유사도와 동일하게 벡터의 길이가 거리에 영향이 미치지 않도록 단위 벡터로 변환하겠다. 그러면 단위 벡터는 단위원에 위치하며 단위원에서 두 벡터를 잇는 짧은 호의 거리를 '벡터의 호 거리'라 하겠다. 벡터의 호 거리는 코사인 유사도와 동일하게 벡터의 방향에만 영향을 받는 거리이며 라디안 각이므로 쉽게 코사인 유사도로 변환이 가능한 값이다. 두 벡터 v, w의 단위 벡터를 v_u, w_u라고 할 때 호의 길이는 식(1)과 같다. (그림 1)을 보면 두 단위 벡터와 원점을 잇는 이등변 삼각형을 이용하게 식(1)이 유도된다.



(그림 1) 벡터의 호 거리

$$d_{Av} = 2\sin^{-1}(\frac{d_E(v_u, w_u)}{2}) \quad (1)$$

여기서 d_E는 유클리드 거리이다.

코사인 유사도를 거리로 변환하는 경우 유클리드 거리와 삼각함수로 유도됨을 확인하였다.

4. 유클리드 거리와 호 거리

좌표 공간에서 두 점을 지나는 반지름이 r인 원의 호 거리를 '점의 호 거리'라 정의하겠다. 두 점 v, w에 대한 점의 호 거리는 식(2)와 같다. 식(1)과 유사한 방식으로 식(2)도 두 점과 반지름이 r인 원의 중심을 잇는 이등변 삼각형을 이용하여 식을 유도된다. 단, 원의 지름 $2r$이 두 점의 거리보다 짧으면 원이 두 점을 지나지 못한다. 이 경우 거리를 무한대로 정의하였다.

$$d_{Ap} = \begin{cases} 2r\sin^{-1}(\frac{d_E(v,w)}{2r}), & d_E(v,w) \leq 2r \\ \infty, & d_E(v,w) > 2r \end{cases} \quad (2)$$

여기서 d_E는 유클리드 거리이다.

식(2)에서 반지름인 r이 무한대로 갈 때를 생각해보자. d_{Ap}를 극한을 취하면 식(3)에서 보듯이 d_{Ap}는 유클리드 거리가 된다. r이 무한대로 가는 극한식으로 쓴 후 $\frac{1}{2r}$을 t로 치환하였다. r이 무한대로 갈 대 $\frac{1}{2r}$은 0으로 수렴하므로 t가 0으로 수렴하는 식으로 다시 썼다. 분수식에서 0으로 수렴할 때 분자와 분모를 미분한 식도 동일하다는 로피탈의 정리를 미분한 후 식을 정리하면 유클리드 거리가 된다. 따라서 r값을 매개변수로 할 경우 점의 호 거리는 유클리드 거리와 통합된다.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{r\to\infty} d_{Ap} = \lim_{r\to\infty} 2r\sin^{-1}\left(\frac{d_E(v,w)}{2r}\right)\\
&t = \frac{1}{2r},\ \left(\frac{1}{2r}\text{를 } t\text{로 치환}\right)\\
&\lim_{t\to 0} d_{Ap} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin^{-1}(d_E(v,w)t)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(\sin^{-1}(d_E(v,w)t))'}{t'}\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{d_E(v,w)}{\sqrt{1-(d_E(v,w)t)^2}}}{1}\\
&= d_E(v,w)
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

또한 유클리드 거리(d_E)를 매개변수 p에 따라 맨하타, 유클리드 거리 등을 표현하는 민코프스키 거리 $\left(\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|v_i-w_i|^p}\right)$로 치환할 경우 점의 호 거리와 민코프스키 거리와 점의 호 거리가 통합이 된다.

5. 유사도 통합

민코프스키 거리는 매개변수 p에 따라서 1인 경우 맨하튼 거리, 2인 경우 유클리드 거리, 무한대인 경우 체비쇼프 거리가 된다[9]. 또한 점의 호 거리는 반지름을 1로 하고 벡터를 단위 벡터로 변환할 경우 제3장에 정의한 벡터의 호 거리가 되며 벡터의 호 거리는 코사인 유사도와 같은 특성을 가지는 거리임을 확인했다. 따라서 제4장에서 정의한 점의 호 거리에 매개변수를 적절히 취하였을 경우 코사인 유사도와 민코프스키 거리가 통합이 된다.

$$
d_A = \begin{cases} 2r\sin^{-1}\left(\frac{d_M}{2r}\right), & d_M \geq 2r \\ \infty, & d_M < 2r \end{cases} \qquad (4)
$$

$$
\text{여기서 } d_M = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|av_i - bw_i|^p}
$$

식(4)는 매개변수 p, r, a, b를 적용하여 매개변수에 따라 6가지의 거리를 나타내는 식이다.<표 1>은 각 매개변수 값에 따른 점의 호 거리가 나타내는 거리를 보여준다.

통합된 식에서 r값을 조정함에 따라 단위원상의 호의 거리가 되거나 직선거리가 된다. p값은 민코프스키 거리에서 사용된 방식과 동일하게 사용된다. a, b값은 두 벡터의 길이가 거리에 영향을 주는 정도를 조정된다. a, b값이 1이면 벡터의 길이가 그대로 영향을 주며 벡터의 길이 역수를 적용하면 벡터의 길이 영향이 없어진다. 응용할 할 때 벡터마다 길이의 영향을 다르게 주는 거리를 필요하면 a, b값을 조정한다.

6. 결론

코사인 유사도를 단위 벡터가 단위원에서 호를 지나는 거리로 변환하여 코사인 유사도처럼 벡터의 크기에 영향을 받지 않고 방향만 영향을 받는 벡터의 호 거리를 제시하였다. 두 점을 지나는 반지름이 r인 원의 호 거리를 점의 호 거리로 정의하고 r이 무한대로 갈 때 점의 호 거리는 유클리드 거리임을 보였다. 유클리드 거리를 민코프스키 거리로 치환하

<표 1> 매개 변수에 따른 점의 호 거리가 나타내는 거리

거리	r	p	a	b
점의 호 거리	$(0,\infty]$	2	1	1
벡터의 호 거리(d_{Av}) 코사인 유사도($\cos(d_{Av})$)	1	2	$\frac{1}{\lvert v\rvert}$	$\frac{1}{\lvert w\rvert}$
맨하탄 거리	∞	1	1	1
유클리드 거리	∞	2	1	1
체비쇼프 거리	∞	∞	1	1
민코프스키 거리	∞	$(0,\infty]$	1	1

고 매개변수 2개를 추가하여 벡터의 호 거리와 점의 호 거리를 통합하였다. 매개변수 p, r, a, b를 이용하여 통합된 점의 호 거리가 매개변수에 따라 코사인 유사도와 민코프스키 거리를 나타냄을 보였다.

제시된 점의 호 거리는 <표 1>에서 제시된 매개변수 이외의 값을 취하여 좀 더 다양한 거리 함수가 만들어진다. 이렇게 만들어진 거리 함수는 데이터베이스 분야에서 유사도 질의에서 응용된다. 그리고 인공지능의 패턴인식 분야에서 최근접이웃 탐색 등에서 응용된다. 이후 연구에서 매개 변수 값이 <표 1>에 제시된 이외의 값을 적용한 유사도가 실제 사례에서 어떤 의미를 가지고 기여 가능한 응용이 존재하는지 찾아보겠다. 그리고 거리가 아닌 유사도 형태로의 통합식을 추후 연구를 통하여 제시하겠다.

참고문헌

[1] Similarity measure, https://en.wikipedia.org/wiki/Similarity_measure, [Acceded by 2020.09.27]

[2] Metric (mathematics), https://en.wikipedia.org/wiki/Metric_(mathematics), [Acceded by 2020.09.27]

[3] Richard O. Duda , Peter E. Hart , David G. Stork, “Pattern Classification” 2nd Edition, Wiley-Interscience, 2000

[4] Dongshun Cui, Guang-Bin Huang, Tianchi Liu, “ELM based smile detection using Distance Vector”, Pattern Recognition 79 pp. 356-369, 2018

[5] P.F. Felzenszwalb, R.B. Girshick, D. McAllester, D. Ramanan, “Object detection with discriminatively trained part-based models”, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. (TPAMI) 32 (9) pp. 1627 - 1645, 2010

[6] 이지영, 최지원, 신재민, “컴퓨터를 이용한 신약개발, 향후 기술 전망”, 정보과학회지 제31권 제8호, pp. 35-54, 2013

[7] Cosine similarity, https://en.wikipedia.org/wiki/Cosine_similarity, [Acceded by 2020.09.27]

[8] Jaccard index, https://en.wikipedia.org/wiki/Jaccard_index, [Acceded by 2020.09.27]

[9] Minkowski distance, https://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski_distance, [Acceded by 2020.09.27]

[10] Sung-Hyuk Cha, “Comprehensive Survey on Distance/Similarity Measures between Probability Density Functions”, International Journal of Mathematical models and Methods in Applied Sciences, 1 (4), pp. 300-307, 2007

[11] Michel Marie Deza, Elena Deza "Encyclopedia of Distance" 4th Ed. Springer, 2006

[12] David Poole, “Linear Algebra: A Modern introduction” 4th Ed, Cengage Learning, 2016